Varianta 7

Subiectul I.

a) Punctul M aparține elipsei $\Leftrightarrow$ $a = 9$.

b) Intersecțiile dreptei cu axele sunt punctele $A(7, 0)$, $B\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

d) Punctele A, B, C aparțin planului dat $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$.

e) Cel mai mare dintre cele trei numere este $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) 1.

Subiectul II.

1.

a) $\left(X^2 - 3X + 2\right)^2 = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 = f$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 2$.

c) Restul împărțirii lui f la g este 36.

d) Suma coeficienților polinomului este egală cu 0.

e) Cea mai mică valoare a funcției g este $y_V = -\frac{1}{4}$.

2.

a) Calcul direct.

b) $[S] = 0$.

c) $x = \frac{-1}{2}$ este punctul de maxim local al funcției.

d) Dreptele $d: x = 0$ și $g: x = -1$ sunt asimptote verticale (bilaterale).

e) $S = \ln\frac{4}{3}$.

Subiectul III.

a) $X^{-1} = \frac{1}{a} \cdot I_3$.

b) Presupunem contrariul deci că există $a \in \mathbf{Q}$ pentru care $X = aI_3 \in H$.

Înlocuind în $X^{-1} = X^2 + X$, obținem $a^3 + a^2 - 1 = 0$, dar ecuația anterioară nu are rădăcini raționale, fals.

c) Dacă $A \in H$, atunci A este inversabilă şi $A^{-1} = A^2 + A \iff A \cdot A^{-1} = A^3 + A^2$

d) Se foloseşte punctul **c)** şi faptul că $A \in H$.

e) Calcul direct.

f) Dacă $A \in H$, rezultă că A este inversabilă.

Pentru o matrice inversabilă $P \in M_3(\mathbf{Q})$, notăm $U = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Atunci U este inversabilă şi $U^{-1} = \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^{-1} = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$.

Mai mult, se demonstrează că $U^2 + U = U^{-1}$, deci $U \in H$.

g) Pentru $a \in \mathbf{Q}^*$, toate matricele de forma $P_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt inversabile.

Alegem $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in H$.

Din **f)** rezultă că pentru orice $a \in \mathbf{Q}^*$, $P_a^{-1} \cdot A \cdot P_a \in H$.

Deoarece când a parcurge $\mathbf{Q}^*$, matricele $P_a^{-1} \cdot A \cdot P_a$ sunt elemente distincte ale mulțimii *H*, rezultă că mulțimea H are o infinitate de elemente, de unde deducem concluzia.

Subiectul IV.

a) Integrând prin părți obținem: $I_1 = \cos 1 + 2\sin 1 - 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{2n}\left(x^2 - 1\right) \cdot \sin x \, dx < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

c) $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci f este concavă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, considerăm punctele $A(1, 0)$ şi $M(\cos x, \sin x)$ de pe cercul trigonometric. Deoarece y_M este mai mic decât lungimea arcului mic de cerc cu capetele în A şi *M*, deducem că $\sin x < x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Considerăm punctele $O(0, 0)$ şi $N\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ de pe graficul funcției sinus.

Deoarce pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, graficul funcției sinus este deasupra coardei (ON), se deduce concluzia.

e) Din **d)** obținem că $\frac{2}{\pi}\cdot x \le \sin x \le x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi înmulțind inegalitatea cu $x^{2n} \ge 0$, avem: $\frac{2}{\pi}\cdot x^{2n+1} \le x^{2n}\cdot \sin x \le x^{2n+1}$, $\forall x \in [0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Integrând această ultimă dublă inegalitate pe intervalul $[0,1]$, obținem concluzia.

f) Se verifică prin calcul direct.

g) Din **e)**, avem $0 < I_n < \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este mărginit.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)(2n+1)}\cdot I_{n+1} = 0$.

Din **f)**, înlocuind $n \in \mathbf{N}^*$ cu $n+1$, obținem $n\cdot I_n = \frac{2(n+1)\sin 1 - \cos 1 - I_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)}\cdot n$ şi

obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n) = = \frac{1}{2}\cdot \sin 1$.